Communications of KRIMS 1 (2025), No. 2, pp. 81-106
http://doi.org/10.23390/ckrims.2025.1.2.81

고등학교 물리 개념의 깊이 있는 이해를 위한 수학적 설명 제안

전관우*, 김선희†

요약. 고등학교 물리 교과서의 물리 개념이 정성적으로만 서술되고 정량적인 설명이 부족하다는 점에서 학생들은 물리 개념을 깊이 있게 이해하기보다 공식을 암기하는 데 그치고 있다. 본 연구는 수학을 활용하여 물리 개념을 수식으로 설명하고 정량적인 해석을 추가함으로써 개념 이해를 돕고자 한다. 2015 개정 교육과정의 〈물리학Ⅰ〉, 〈물리학Ⅱ〉 교과서에서 수학을 활용하여 충격량과 운동량, 일-에너지 정리, 등속 원운동, 파동의 간섭, 스넬의 법칙, 유도기전력의 설명을 재구성하는 제안을 하여 보다 논리적이고 명확한 개념 설명이 가능함을 보였다. 또한, 교과서 본문에 포함되지 않지만 수학적으로 접근 가능한 개념인 교류 회로에서의 리액턴스 계산, 운동량 보존 법칙을 활용한 내부에너지 유도의 내용을 '교과서 부록' 형태로 구성하여 제안하였다. 이로써 교과서 수준을 벗어나지 않으면서도 학습의 확장성을 제시하며, 물리 교과에서 수리 소양을 갖추게 하는 데 기초가 되는 방안을 제시하였다.

1. 서론

2022 개정 교육과정은 언어 소양, 수리 소양, 디지털 소양을 모든 교과 학습의 기반이 되는 기초 소양으로 설정하고 있다. 수리 소양은 과학적 탐구와 문제 해결 능력의 토대가 되는 중요한 소양이다. 특히, 물리 교과는 수리 소양과 밀접하게 연결된 교과이지만 수리 소양을 증진시킬 방안은 물리 교과에서조차 제시되어 있지 않다.

현행 고등학교 물리 교과서는 미적분과 같은 수학 개념을 가능한 한 배제하고 설명되어 있다. 이러한 접근 방식은 개념의 직관적 이해를 돕는다는 장점이 있으나, 물리 현상의 정량적 해석이나 수치적 논리 전개를 어렵게 한다는 한계가 있다. 결과적으로 학생들은 물리 법칙의 근본적인 수학적 구조를 충분히 인식하지 못한 채 단편적인 공식 암기에 의존할 수밖에 없다.

본 연구는 2015 개정 수학과 교육과정에서 다루는 미분, 적분, 삼각함수를 활용하여, 고등학교 물리 개념을 수학적으로 보완하고 재구성하는 것을 목적으로 한다. 이를 통해 학생들이 물리 법칙의 수학적 배경을 인식하고, 양적 사고 및 문제 해결 능력을 함양하여 학습자의 수리 소양을 증진하는 데 이바지하고자 한다. 구체적으로 〈물리학Ⅰ〉, 〈물리학Ⅱ〉의 충격량과 운동량, 일-에너지 정리, 등속원운동, 파동 간섭, 스넬의 법칙, 유도기전력 단원에 대해 수학적 해석을 추가함으로써 기존 서술의 논리적 완결성을 강화하고자 한다. 그리고 교과서를 재구성하여 교류 회로에서의 코일 및 축전기의 리액턴스 계산, 운동량 보존 원리를 통한 내부에너지의 유도를 고등학교 수학 수준 내에서 제시함으로써 물리 개념의 확장 가능성을 탐구하고자 한다. 적용한 수학 개념은 2015 개정 고등학교 수학과 교육과정(수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분, 기하)의 범위를 초과하지 않으며, 직관적이면서도 체계적인 수학적 해석을 지향한다.

2020 Mathematics Subject Classification: 97U20
Key words and phrases: physics, textbook, deep understanding
* This work is based on the undergraduate thesis of Jeon Gwan U.
† Advisor.

2. 이론적 배경

2.1 물리와 수학의 개념 연결의 정량적인 설명을 위한 고등학교 수학 개념

〈표 1〉은 고등학교 물리 개념에 적용할 수 있는 수학 개념을 정리한 것이다. 물리 개념별로 대응되는 수학 개념과 수학·물리과 성취기준을 제시하였다. 이 표는 교과서 서술의 수학적 보완 방향을 제시하고, 수리적 사고력 기반의 물리 개념 설명이 가능한 단원을 구조화 하는데 기초 자료로 활용될 수 있다.

<표 1> 주제별 성취기준

물리 개념	관련 수학 개념	수학과 성취기준	물리과 성취기준
운동량과 충격량	미분, 평면벡터	[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. [12기하02-01] 벡터의 뜻을 안다. [12기하02-02] 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.	[12물리Ⅰ01-04] 물체의 1차원 충돌에서 충돌 전후의 운동량 보존 이용하여 속력의 변화를 정량적으로 예측할 수 있다.
일-에너지 정리	적분	[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.	[12물리Ⅰ01-06] 직선 상에서 운동하는 물체의 역학적 에너지가 보존되는 경우와 열에너지가 발생하여 역학적 에너지가 보존되지 않는 경우를 구별하여 설명할 수 있다.
등속 원운동	삼각함수 미분, 평면벡터	[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. [12기하02-01] 벡터의 뜻을 안다. [12기하02-02] 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. [12기하02-04] 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.	[12물리Ⅱ01-05] 구심력을 이용하여 등속 원운동을 설명할 수 있다.
파동의 간섭	삼각함수 덧셈정리	[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.	[12물리Ⅰ03-04] 파동의 간섭이 활용되는 예를 찾아 설명할 수 있다.
스넬의 법칙	미분	[12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.	[12물리Ⅰ03-01] 파동의 진동수, 파장, 속력 사이의 관계를 알고 매질에 따라 파동의 속력이 다른 것을 활용한 예를 설명할 수 있다.
유도기전력	미분	[12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수	[12물리Ⅱ02-07] 자기선속이 시간에 따라 변화할 때 유도 기전력이 회로에 유도되는 현상에서 기전력의 크기를 구할 수 있다.

		를 미분할 수 있다. [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.	
리액턴스 계산	미분	[12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다 [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결 할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.	[12물리Ⅱ03-03] 교류 회로에서 전자기파의 발생 및 안테나를 통한 수신 과정을 설명할 수 있다.
열역학 과정 속 내부 에너지 유도	적분	[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.	[12물리Ⅰ01-07] 열기관이 외부와 열과 일을 주고받아 열기관의 내부에너지가 변화됨을 사례를 들어 설명할 수 있다. [12물리Ⅰ01-08] 열이 모두 일로 전환되지 않는다는 것을 사례를 들어 설명할 수 있다.

2.2 선행연구

2022 개정 교육과정에서는 “모든 학생이 학습의 기초인 언어・수리・디지털 기초소양을 갖출 수 있도록 하여 학교 교육과 평생 학습에서 학습을 지속할 수 있게 한다.”고 명시하였다(교육부, 2022). 또한, ‘학교 교육과정 설계와 운영’ 중 ‘교수학습’에서 “교과의 깊이 있는 학습에 기반이 되는 언어・수리・디지털 기초소양을 모든 교과를 통해 함양할 수 있도록 수업을 설계한다.”(교육부, 2022)라고 언급되어 있다.

박수민(2023, p.351)은 수리 소양을 수학에 대한 자신감, 수학의 본질과 역사에 대한 이해와 공공 영역의 문제를 이해하기 위한 수학의 중요성, 논리적 사고와 의사 결정, 다른 상황에서 실제 일상 문제를 해결하기 위하여 수학을 사용, 숫자 감지 및 기호 감지, 데이터에 대한 추론, 다양한 전제 조건의 수학적 지식과 도구를 활용할 수 있는 능력으로 정의하였다. 강지훈(2008)은 「고등학교 수학교과과정 수정에 관한 고찰」에서, 수학 교과에서 배우는 개념들이 다른 교과, 특히 물리 교과와 잘 연결되지 않는다는 점을 지적하였다. 그는 등속원운동이나 파동 간섭 등의 물리 개념이 미분이나 삼각함수 같은 수학 개념과 관련이 깊다는 점을 설명하며, 교과 간 연계가 필요하다는 주장을 하였다. 하지만 구체적인 교과서 분석이나 수학적으로 내용을 다시 설명하는 방식까지는 나아가지 않았고, 분석 대상도 일부 개념에 한정되어 있었다. 또한 2007 개정 교육과정을 바탕으로 작성되었기 때문에, 현재 학교에서 사용되고 있는 2015 개정 교육과정과는 차이가 있다.

3. 연구 방법

2015 개정 교육과정에 따라 발행된 고등학교 〈물리학Ⅰ〉 및 〈물리학Ⅱ〉 교과서(지학사)를 분석하였으며, 각 단원에서 물리 개념이 어떤 방식으로 서술되고 있는지를 검토하였다. 특히, 수학적 연역 과정이 생략되었거나, 수식 없이 개념을 직관적으로만 설명하는 단원을 중심으로 분석을 진행하였다.

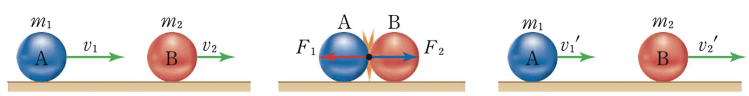
그리고 고등학교 수학 개념을 적용하여 교과서의 설명을 보완하였다. 미분, 적분, 삼각함수 등의 수학 내용을 활용하여 물리 개념을 수식으로 표현하거나 계산 과정을 서술하였다. 교과서에서 수학적 표현을 지양하여 오히려 복잡하게 서술된 부분은, 수학을 통해 보다 간결하게 설명할 수 있도록 재구성할 수 있었다. 수학적 설명은 고등학교 수학과 교육과정의 범위를 넘지 않도록 구성하였으며, 물리 개념에 대한 수학적 이해를 자연스럽게 유도하는 데 중점을 두었다. 아울러 교과서 본문에 포함되어 있지 않거나 부록, 참고자료 수준에서 간략히 언급된 심화 개념 중, 고등학교 수학을 통해 설명할 수 있는 주제(예: 코일 및 축전기의 리액턴스 계산, 이상기체 상태방정식을 통한 내부에너지 유도)는 부록 형식으로 제작하였다. 이 주제들은 교과서 수준을 약간 확장한 형태로, 고등학교 수학 범위 내에서 직관적으로 해석할 수 있도록 구성하였다.

4. 연구 결과

4.1 물리 교과서의 수학적 설명 보완 방안

4.1.1 운동량 보존

운동량은 물체의 질량과 속도의 곱으로 정의되며, 외부 힘이 작용되지 않는 한 보존되는 물리량이다. 충격량은 물체에 작용한 힘과 작용시간의 곱으로 정의되며, 운동량의 변화량과 동일하다. 〈물리학Ⅰ〉교과서에서는 벡터의 표현 없이 1차원 충돌만을 다룸을 보여준다([그림 1]). 충돌 전, 충돌 순간, 충돌 후의 속도 변화를 통해 운동량 보존 개념을 설명하고 있으며, 충돌하는 두 물체에 작용하는 힘의 크기와 방향이 같고 반대임을 나타낸다.



| 그림 Ⅰ-18 | 두 물체의 충돌과 운동량 보존

충돌하는 동안 A가 받는 힘 F_1과 B가 받는 힘 F_2는 크기가 같고 방향이 반대이므로 $F_1=-F_2$이다. 힘은 질량과 가속도의 곱($m\times a$)이고 가속도는 충돌이 일어나는 시간 t 동안의 속도 변화량이므로 $m_1\frac{v_1'-v_1}{t}=-m_2\frac{v_2'-v_2}{t}$이다. 양변에 t를 곱하고 정리하면 다음과 같다.

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$$

[그림 1] 두 물체의 1차원 충돌시 운동량 보존 (김성원 외, 2018a, p.32)

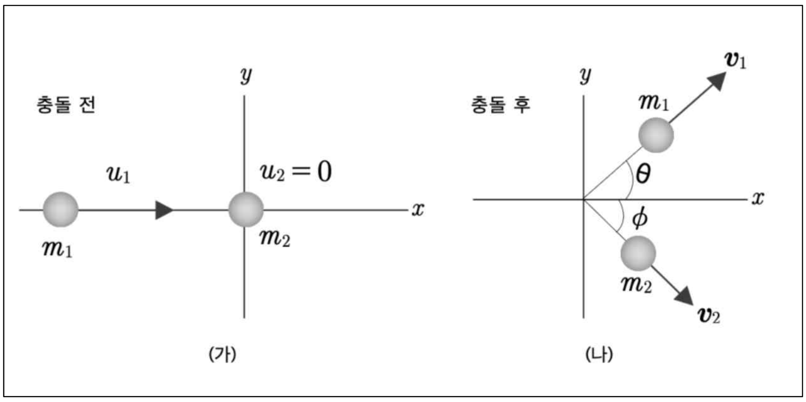
이 내용을 학습하기 위해서는 고등학교 미적분과 기하 과목까지 선행되어야 한다. 운동량 보존의 본질은 벡터량이다. 하지만, 벡터 표현으로 개념들을 설명하는 〈물리학Ⅱ〉 교과서에서는 운동량 보존을 다루고 있지 않다. 따라서 벡터 개념을 활용하여 운동량을 보다 엄밀하게 설명하고자 한다.

[그림 1]에 제시된 상황을 벡터 표현을 이용해 다시 서술하면 운동량 보존이 1차원에서만 성립하는 것이 아님을 보일 수 있다. 먼저, 힘은 운동량 변화량과 같음을 수식으로 나타내면

다음과 같다.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

뉴턴의 제 3법칙인 작용 반작용 법칙에 의해 $\vec{F_1} + \vec{F_2} = 0$, $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}|$ 이고, 운동량을 이용해서 나타내면 $\frac{d|\vec{p_1}|}{dt} = \frac{d|\vec{p_2}|}{dt}$ 이다. 따라서 각 물체의 운동량 시간 변화량이 같고 운동량이 보존된다. 이제 2차원 상황에서도 운동량 보존 법칙이 성립함을 확인할 수 있다. 제시할 상황은 [그림 2]와 같고, 에너지 손실은 없음을 가정한다.



[그림 2] 2차원에서 두 물체의 충돌 전후

충돌 전의 상황은 질량이 m_1인 물체가 $\vec{u_1} = (u_1, 0)$의 속도로 움직이고 있고, 질량이 m_2인 물체는 정지해 있는 상황이다. x축 운동량 크기의 합은 $m_1 u_1$, y축 운동량의 합은 0이다. 충돌 후 m_1, m_2의 속도는 각각 $\vec{v_1} = (v_1\cos\theta, v_1\sin\theta)$, $\vec{v_2} = (v_2\cos\phi, v_2\sin\phi)$이다.

운동량 보존 법칙에 의해

$$\vec{p_1} = \vec{p_1'} + \vec{p_2'}$$

이고, x축, y축 운동량은 각각

$$p_x = m_1 u_1 = m_1 v_1 \cos\theta + m_2 v_2 \cos\phi$$

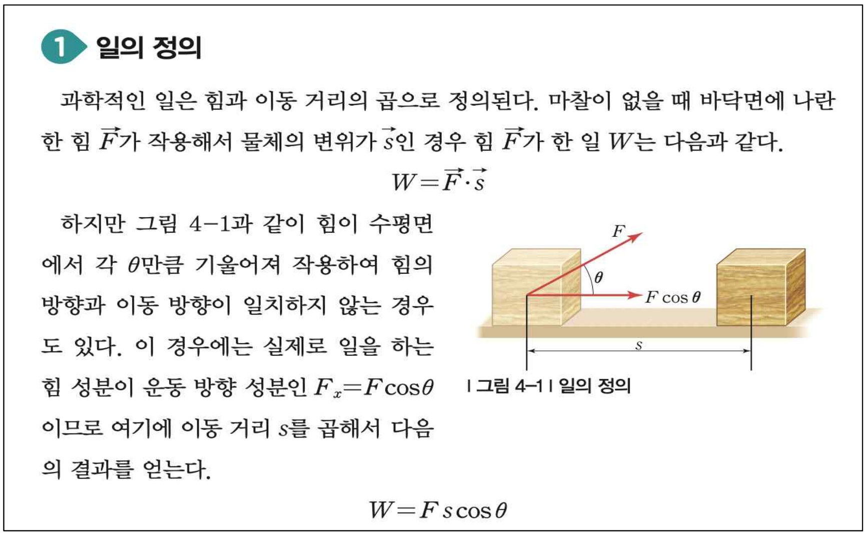
$$p_y = 0 = m_1 v_1 \sin\theta + m_2 v_2 \sin\phi$$

이다. 벡터를 이용해 서술한다면, 이전에는 설명하지 못했던 운동량 보존법칙을 2차원에서도 설명할 수 있다.

4.1.2 일과 에너지

일-에너지 정리는 물체에 한 일이 물체의 운동에너지 변화와 같다는 원리이다. 일은 힘과 변위의 내적으로 정의되며, 운동에너지는 질량과 속도에 따라 결정되는 에너지이다.

[그림 3]은 〈물리학Ⅱ〉교과서에서 일이 힘과 변위의 내적으로 설명되고 있음을 보여준다. 이와 같은 서술은 힘의 크기가 일정할 때는 성립할 수도 있지만, 교과서에서는 그러한 서술이 생략되어 일을 단순 공식으로 암기할 가능성이 있다.



1 일의 정의

과학적인 일은 힘과 이동 거리의 곱으로 정의된다. 마찰이 없을 때 바닥면에 나란한 힘 $\vec{F}$가 작용해서 물체의 변위가 $\vec{s}$인 경우 힘 $\vec{F}$가 한 일 W는 다음과 같다.

$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}$$

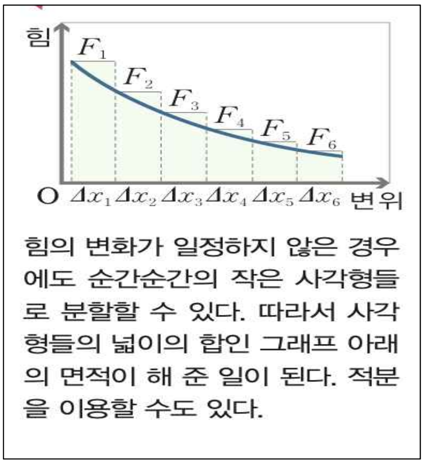
하지만 그림 4−1과 같이 힘이 수평면에서 각 θ만큼 기울어져 작용하여 힘의 방향과 이동 방향이 일치하지 않는 경우도 있다. 이 경우에는 실제로 일을 하는 힘 성분이 운동 방향 성분인 $F_x=F\cos\theta$이므로 여기에 이동 거리 s를 곱해서 다음의 결과를 얻는다.

ㅣ그림 4−1ㅣ 일의 정의

$$W=Fs\cos\theta$$

[그림 3] 벡터의 내적으로 서술된 힘이 한 일 (김성원 외, 2018b, p.68)

[그림 4]는 교과서에서 힘의 변화가 일정하지 않은 경우 구분구적법을 이용해 힘이 해준 일의 양을 구하거나, 적분을 이용해 일의 양을 구할 수 있음을 다루고 있지만, 수식적인 설명과 예시 없이 제시하고 있음을 보여준다.



힘의 변화가 일정하지 않은 경우에도 순간순간의 작은 사각형들로 분할할 수 있다. 따라서 사각형들의 넓이의 합인 그래프 아래의 면적이 해 준 일이 된다. 적분을 이용할 수도 있다.

[그림 4] 힘의 변화가 일정하지 않은 경우 일의 양 (김성원 외, 2018b, p.70)

이 내용을 학습하기 위해서는 고등학교 미적분까지 학습이 선행되어야 한다. 〈물리학Ⅱ〉 교과서는 적분으로 서술되어야 하는 일의 양을 힘과 이동거리가 상수일 때만을 고려하여 단순 벡터의 내적으로 서술되어 있다. 이는 학생들에게 일의 양은 힘의 크기와 이동거리를 단순하게 곱하기면 하면 된다는 오개념을 심어줄 여지가 있다. 힘의 방향이 이동방향과 나란한 상황*에서 일의 양에 대해 정확하게 서술하면,

$$W=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}F_i\Delta s_i=\int_a^z F ds$$

가 된다.
적분으로 표현을 바꾼다면, 힘의 크기가 일정하지 않아도 일의 양을 구할 수 있다. 이러한

* 벡터의 적분은 고등학교 수학과 교육과정에서 다루지 않으므로 방향이 나란한 상황만을 다룬다.

형태로 일의 서술 방식을 힘과 이동거리의 단순 곱이 아닌 적분의 형태로 표현한다면 위치에 따라 힘이 바뀌는 상황인 용수철이 한 일을 구하는 것을 공식의 형태로 제시한 것과 달리 학생들이 직접

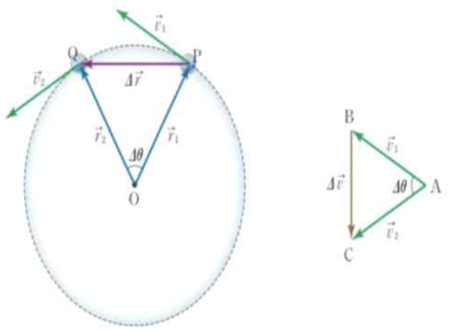
$$W=\int_{x_i}^{x_j} kx\,dx=\frac{1}{2}k(x_j-x_i)^2 \quad (\text{용수철의 초기 위치 } x_i,\ \text{나중 위치 } x_j)$$

과 같은 과정을 유도하여 보다 근본적인 원리를 통한 학습이 가능하다.

4.1.3 등속 원운동

등속 원운동은 물체가 원 궤도를 따라 일정한 속력으로 움직이는 운동을 말하며, 운동 방향이 계속 변하므로 항상 중심을 향한 가속도와 알짜힘이 존재한다. 원운동에서는 속력은 일정하지만 속도는 방향이 변하기 때문에 구심 가속도 개념이 도입된다. 구심 가속도를 설명할 때 미분을 간접적으로 사용하고 구체적인 벡터 계산은 지양한다([그림 5]). 구심 가속도를 구할 때 삼각형의 닮음을 이용하고 벡터의 내적을 사용하지 않기 때문에 구심 가속도의 방향은 명확한 근거 없이 중심 방향임을 서술하고 있다.

2 구심 가속도 계산하기



| 그림 5-2 | 구심 가속도 계산하기

△OPQ와 △ABC는 $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$의 끼인각과 $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$의 끼인각이 $\Delta\theta$로 같다. 또한, 두 삼각형은 이등변삼각형이므로 닮은꼴 삼각형이다.

$|\vec{r}_1|=|\vec{r}_2|=r$, $|\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|=v$이고, $|\Delta\vec{r}|=\Delta r$, $|\Delta\vec{v}|=\Delta v$라고 하자. 닮음비를 이용하면,

$$\frac{\Delta r}{r}=\frac{\Delta v}{v}$$

이다. 이 식의 양변을 Δt로 나누어도 등식이 성립하므로

$$\frac{\Delta r}{r\Delta t}=\frac{\Delta v}{v\Delta t}$$

이다. 여기서 $v=\Delta r/\Delta t$, $a=\Delta v/\Delta t$이므로

$$\frac{v}{r}=\frac{a}{v}$$

가 성립한다. 이 식을 이용하여 구심 가속도의 크기를 구할 수 있다. 이 구심 가속도의 크기를 a_c로 표기하면 다음의 관계식을 얻는다.

구심 가속도의 크기 $a_c=\frac{v^2}{r}$

구심 가속도의 방향은 언제나 원의 중심을 향한다. 그 크기는 속력의 제곱을 원의 반지름으로 나눈 값이다.

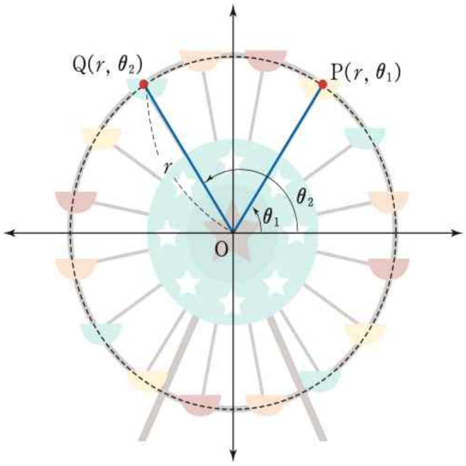
[그림 5] 삼각형의 닮음을 이용한 구심 가속도 계산 (김성원 외, 2018b, p.41-42)

〈물리학Ⅱ〉 교과서의 각속도를 이용한 등속 원운동의 표현에서는 극좌표계를 이용해 각속

도를 정의하고 있다([그림 6]). 하지만 극좌표계를 이용하여 변위를 나타내고 미분하여 속도와 가속도를 구하는 방법을 사용하지 않는다.

각속도를 이용한 등속 원운동의 표현

(가) 대관람차



(나) 극좌표 위에 나타낸 두 점

I 그림 5-3 I 각속도를 이용한 등속 원운동의 표현

그림 5-3 (가)와 같이 놀이공원에서 볼 수 있는 대관람차도 등속 원운동을 한다. 대관람차의 한 차량의 위치를 5-3 (나)와 같이 극좌표 위에 점 P와 점 Q로 나타낼 수 있다. 이때 점 P의 좌표는 (r, θ_1), 점 Q의 좌표는 (r, θ_2)이다. 시간 Δt 동안 물체가 원주를 따라 P에서 Q로 운동해 갔다고 하자. 대관람차의 반지름이 r로 일정한 상태에서의 운동이므로 변위의 크기는 각의 변화량 $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$만으로 표현할 수 있다. 이 시간 동안 실제로 원주 위에서 움직인 거리 Δs는 $\Delta s=r\Delta\theta$로 주어진다. 이로부터 물체의 속력은 $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

로 나타낼 수 있다. 여기서 $\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$로 정의하고 **각속도**라 부르며 단위는 주로 rad/s를 쓴다. 등속 원운동의 속력 v와 각속도 ω 사이의 관계식은 다음과 같다.

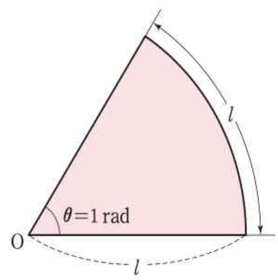
$$v=r\omega$$

이 관계식을 이용하면 구심 가속도 a_c는 $a_c=\frac{v^2}{r}=\frac{r^2\omega^2}{r}=r\omega^2$

더 자세히

라디안(radian)

각도의 단위로써 호의 길이가 반지름의 길이가 같은 부채꼴의 중심각을 1 rad으로 정의한다. 360°는 2π rad이다.



[그림 6] 극좌표계를 이용한 각속도 설명 (김성원 외, 2018b, p.43)

이 내용을 학습하기 위해서는 고등학교 미적분 과목까지 학습이 선행되어야 한다. 원운동에서 원의 반지름을 (r) 각속도를 (ω)라고 하면 물체의 위치 벡터는

$$\vec{s}=(r\cos(wt), r\sin(wt))$$

로 둘 수 있다.

$$\frac{d\vec{s}}{dt}=\vec{v}=(-rw\sin(wt), rw\cos(wt))$$

에서 속도의 크기를 구해보면

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{r^2 w^2 \sin^2(wt) + r^2 w^2 \cos^2(wt)} = rw$$

이다.

같은 방식으로 가속도를 구하면

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = (-rw^2\cos(wt),\ -rw^2\sin(wt))$$

이고 가속도의 크기를 구하면

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{r^2 w^4 \cos^2(wt) + r^2 w^4 \sin^2(wt)} = rw^2$$

이다.

또한, 가속도의 방향을 구하기 위해 벡터의 내적을 계산하면

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\vec{a} &= (-rw\sin(wt), rw\cos(wt))\cdot(-rw^2\cos(wt), -rw^2\sin(wt)) \\ &= rw^3\sin(wt)\cos(wt) - rw^3\sin(wt)\cos(wt) = 0\end{aligned}$$

이며 이로써 가속도의 방향은 접선 방향에 항상 수직한 방향을 갖게 된다.

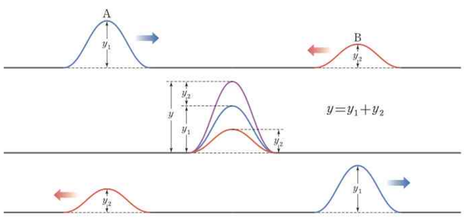
〈물리학Ⅱ〉 교과서는 등속 원운동의 속도, 구심가속도의 크기만을 구하고 이를 삼각형의 닮음 관계 등을 활용하여 구했다. 하지만, 극좌표계를 사용해 위치벡터를 삼각함수로 나타내어 미분을 통해 속도, 각속도 벡터 자체를 더 간편하게 구할 수 있다. 교과서에서는 구심 가속도의 방향을 원운동의 중심 방향임을 단순하게 서술하는 데 그쳤지만, 식을 이용하여 표현하면 벡터의 내적을 이용하여 속도의 방향과 수직임을 알 수 있다.

4.1.4 파동의 간섭

파동의 간섭은 두 개 이상의 파동이 중첩할 때 나타나는 현상으로, 동일한 공간에서 진동이 더해지거나 상쇄되는 결과를 만든다. 간섭은 파동의 위상차에 따라 보강 간섭과 상쇄 간섭으로 나누어진다. [그림 7]은 〈물리학Ⅰ〉교과서에서 두 파동이 만날 때의 중첩에 관하여 설명하고 있다. 하지만 두 파동의 주기가 다를 경우에는 어떠한 형태로 합성이 이루어지는지 혹은 위상의 차이가 있다면 중첩이 어떻게 되는지에 관한 설명은 없다. 일반적인 상황을 다루지 않고 파동의 독립성과 중첩 두 가지 개념만을 설명한다.

1 파동의 중첩과 독립성

그림 Ⅲ-26과 같이 두 파동이 만나면 파동들이 겹쳐져 원래와 다른 모양이 된다. 파동들이 겹친 모습은 시간에 따라 변하지만, 어느 순간 매질의 각 점의 변위는 그 점을 지나는 각 파동의 변위를 합한 것과 같다. 이를 **파동의 중첩**이라고 한다.

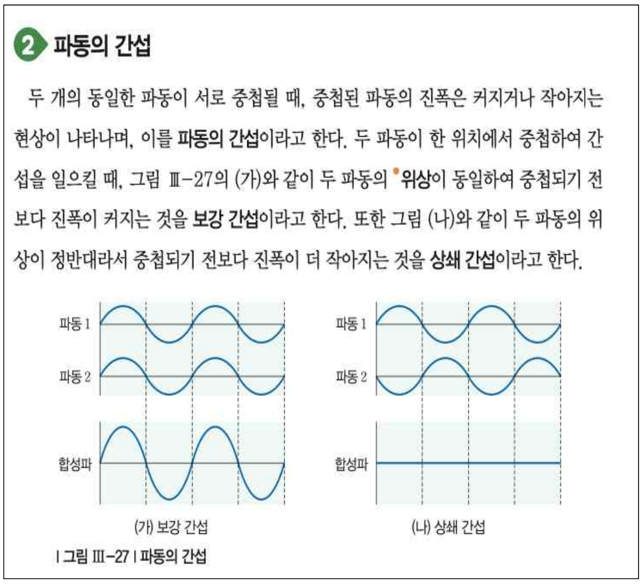


| 그림 Ⅲ-26 | 파동의 중첩과 독립성

각 파동은 중첩되어 진폭의 변위가 변한 후, 겹쳐진 상태를 벗어나면 처음의 모습으로 되돌아가 원래의 진행 방향대로 계속 진행한다. 이처럼 서로 다른 두 개 이상의 파동이 만날 때 본래의 고유한 모양과 속성을 잃지 않고 계속하여 진행하는 성질을 가지며 이를 **파동의 독립성**이라고 한다. 파동의 중첩과 독립성은 입자와 구별되는 중요한 성질이다. 반대 방향으로 진행하여 서로 가까워지는 두 입자는 같은 장소에서 중첩될 수 없고 충돌 후 원래의 운동 상태를 유지할 수도 없기 때문이다.

[그림 7] 파동의 독립성과 중첩 (김성원 외, 2018a, p.173)

〈물리학Ⅰ〉교과서에서는 파동의 간섭을 설명할 때에 마루, 골의 위치와 진폭의 크기가 정확하게 같은 특수한 상황만을 다루고 있고, 일반적으로 두 파동이 만나는 상황은 제시하고 있지 않다([그림 8]). 또한, 어떻게 간섭 현상이 일어나는지, 진폭의 변화는 어떻게 되는지 등에 대한 서술은 없다.


2 파동의 간섭

두 개의 동일한 파동이 서로 중첩될 때, 중첩된 파동의 진폭은 커지거나 작아지는 현상이 나타나며, 이를 **파동의 간섭**이라고 한다. 두 파동이 한 위치에서 중첩하여 간섭을 일으킬 때, 그림 Ⅲ-27의 (가)와 같이 두 파동의 **위상**이 동일하여 중첩되기 전보다 진폭이 커지는 것을 **보강 간섭**이라고 한다. 또한 그림 (나)와 같이 두 파동의 위상이 정반대라서 중첩되기 전보다 진폭이 더 작아지는 것을 **상쇄 간섭**이라고 한다.

| 그림 Ⅲ-27 | 파동의 간섭

[그림 8] 두 개의 동일한 파동의 간섭 (김성원 외, 2018a, p.174)

이 내용을 학습하기 위해서는 고등학교 미적분까지 학습이 선행되어야 한다. 진폭이 같은 두 개의 파장*을 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$f_1 = \sin(wt),\ f_2 = \sin(wt+\phi)\ (\text{단, } \phi\text{=위상차})$$

두 파동이 만나는 점에서의 합성파는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f = f_1 + f_2 = \sin(wt) + \sin(wt+\phi)$$

삼각함수의 덧셈정리 중 사인의 합 공식

$$\sin A + \sin B = 2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$$

를 이용하면,

$$f = 2\cos(-\frac{\phi}{2})\sin(wt+\frac{\phi}{2}) = 2\cos(\frac{\phi}{2})\sin(wt+\frac{\phi}{2})$$

여기서 $2\cos(\frac{\phi}{2})$는 진폭, $wt+\frac{\phi}{2}$는 새로운 위상이다. 이러한 설명을 통해 합성파는 어떤 함수의 형태로 파동이 진행되는지 혹은 진폭은 어떻게 바뀌는지에 대해 정확하게 알 수 있고 교과서에서는 다루지 못했던 위상 차이가 있을 때 또한 다룰 수 있다. 더 나아가, 〈물리학Ⅱ〉에서 파동의 간섭 무늬를 학습할 때에는 파동의 삼각함수 표현이 중요하다. 〈물리학Ⅰ〉에서 이미 파동이 삼각함수의 형태를 띠고 있음을 보였으므로, 이러한 파동이 어떤 방식으로 합성되는지를 학습해 두었다면 〈물리학Ⅱ〉의 학습에 큰 도움이 될 것이다.

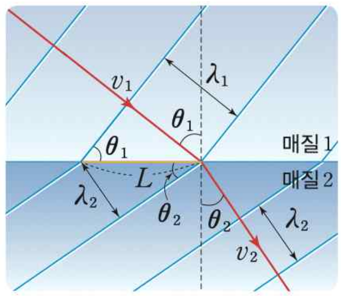
4.1.5 스넬의 법칙

* 진폭이 다른 두 개의 파장 합성은 계산이 매우 복잡하므로 진폭이 같은 상황만을 다룬다.

스넬의 법칙은 빛이 두 매질의 경계면을 지날 때 입사각과 굴절각 사이에 성립하는 관계로, 매질의 굴절률에 따라 빛의 경로가 변함을 설명한다. 이는 빛의 진행경로가 최소 시간 경로를 따른다는 페르마의 원리와 연결된다.

〈물리학Ⅰ〉 교과서에서는 스넬의 법칙을 빛이 진행하는 과정에서 매질이 바뀌게 되면 빛은 굴절을 하게되지만, 파동의 진동수는 변하지 않는다는 사실을 통해 스넬의 법칙을 증명한다([그림 9]). 하지만, 빛이 어떤 경로로 굴절을 하는지, 혹은 어떠한 이유로 굴절을 하게 되는지는 설명하지 않는다. 이는 빛은 가장 짧은 시간이 걸리는 경로를 따라 이동한다는 '페르마의 원리'를 통해 설명할 수 있다. 이 과정은 수학적 모델링을 통해 각 매질에서의 이동시간을 적절한 변수를 통해 나타내고 이동시간 함수를 이동 거리에 대해 미분함으로써 어떠한 경로로 진행되어야 최단 경로인지 직접 확인할 수 있다.

그림 Ⅲ-8은 매질 1에서 매질 2로 입사한 파동이 굴절하는 모습을 나타낸 것이다. 매질 1에서의 파동의 속력과 파장을 각각 v_1, λ_1, 매질 2에서의 파동의 속력과 파장을 각각 v_2, λ_2라고 하면 $\sin\theta_1=\frac{\lambda_1}{L}$, $\sin\theta_2=\frac{\lambda_2}{L}$이고 $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$이 성립한다. 굴절 과정에서 파동의 진동수 f는 변하지 않으므로 파장의 비와 속력의 비가 같고, 각 매질에서의 **굴절률**은 $n_1=\frac{c}{v_1}$, $n_2=\frac{c}{v_2}$이므로 다음 식이 성립한다.



| 그림 Ⅲ-8 | 파동의 굴절

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1} \text{ (단, } \theta_1\text{: 입사각, } \theta_2\text{: 굴절각)}$$

[그림 9] 진동수가 일정함을 이용한 스넬 법칙 설명 (김성원 외, 2018a, p.158)

이 내용을 학습하기 위해서는 고등학교 미적분까지 학습이 선행되어야 한다. [그림 10]에서 x축을 기준으로 다른 매질로 채워져 있는 공간에서 $x>0$인 공간의 매질을 1, $x<0$인 공간의 매질을 2라고 두면, 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{PB}=\sqrt{(x-x_1)^2+d^2},\ \overline{QB}=\sqrt{(x_2-x)^2+d^2}$$

이므로 각 매질을 지나는데 걸리는 시간은

$$t_1=\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+d^2}}{v_1}=\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+d^2}}{c/n_1},\ t_2=\frac{\sqrt{(x_2-x)^2+d^2}}{v_2}=\frac{\sqrt{(x_2-x)^2+d^2}}{c/n_2},\ t(x)=t_1+t_2$$

로 표현할 수 있다. 이동시간이 최소가 되는 지점을 찾기 위해 시간함수를 미분하면,

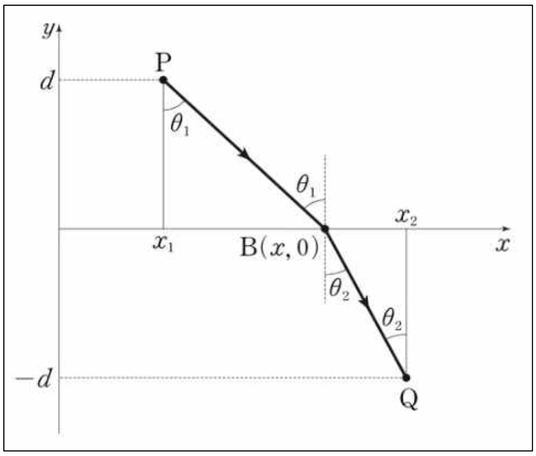
$$\frac{dt(x)}{dx}=\frac{n_1}{c}\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+d^2}}-\frac{n_2}{c}\frac{x_2-x}{\sqrt{(x_2-x)^2+d^2}}=0$$

이고 위 식을 삼각함수를 이용해 나타내면

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$$

가 되고 이는 스넬의 법칙이다.

단순히 빛이 진행하는 매질이 바뀌면 특별한 관계를 갖으면서 굴절한다는 설명에서 빛이 어떠한 이유에서 이와 같이 굴절하는지를 미분을 통해 설명할 수 있다.



[그림 10] 서로 다른 매질 사이에서 굴절하는 빛의 경로

4.1.6 유도기전력

유도기전력은 자기장이 변하거나 도체의 면적이 변화할 때 전류가 유도되는 현상에서 발생하는 전압이다. 패러데이의 전자기 유도 법칙에 따라 유도기전력은 시간에 대한 자기선속의 변화율로 표현된다.

〈물리학Ⅱ〉교과서에서는 자기장의 세기가 선형인 상황만을 고려하여 자기선속을 구하고 있음을 보여준다([그림 11]). 다만, 자기장의 세기가 시간에 따라 비선형적으로 변할 때는 어떠한 방식으로 자기선속을 구해야 하는지, 혹은 자기장의 세기가 시간에 따라 비선형적으로 변할 때 같은 방식으로 구할 수 있는지에 관한 언급은 없다.

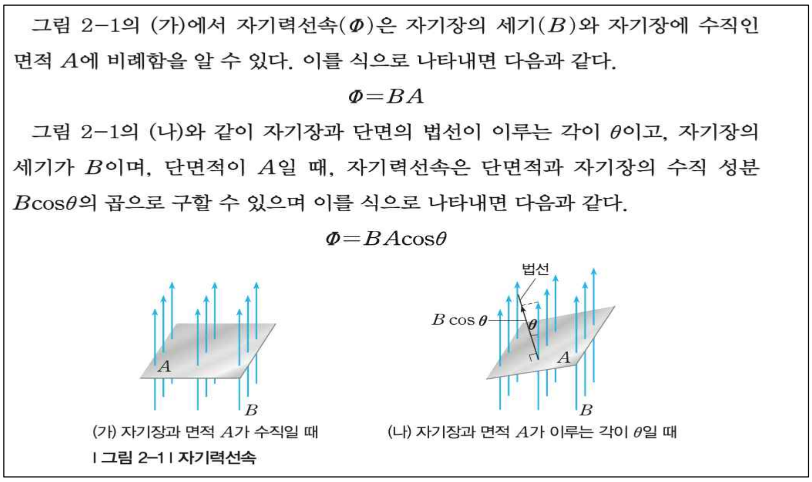


그림 2–1의 (가)에서 자기력선속(Φ)은 자기장의 세기(B)와 자기장에 수직인 면적 A에 비례함을 알 수 있다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\Phi = BA$$

그림 2–1의 (나)와 같이 자기장과 단면의 법선이 이루는 각이 θ이고, 자기장의 세기가 B이며, 단면적이 A일 때, 자기력선속은 단면적과 자기장의 수직 성분 $B\cos\theta$의 곱으로 구할 수 있으며 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\Phi = BA\cos\theta$$

(가) 자기장과 면적 A가 수직일 때

(나) 자기장과 면적 A가 이루는 각이 θ일 때

| 그림 2–1 | 자기력선속

[그림 11] 자기장의 세기가 선형임을 가정한 자기선속 설명 (김성원 외, 2018b, p.145)

〈물리학Ⅱ〉 교과서는 자기장의 세기가 변할 때 앞서 구한 자기선속 식을 바탕으로 유도기전력을 구하고 있다([그림 12]). 자기장의 세기가 시간에 대해 선형적이지 않은 상태일 때, $\frac{\Delta B}{\Delta t}$를 통해 유도기전력을 계산하면 미분을 통해 직접 구하는 형태와 다른 결과값이 도출될

수 있다.

면적이 일정한 도선 고리에서 자기장의 세기가 변할 때

그림 2-3과 같이 면적이 일정한 도선 고리를 통과하는 자기장이 변하는 경우 유도 기전력의 크기는 어떻게 되는지 알아보자. 자기력선속 $\varPhi$는 BA이므로 자기력선속의 변화 $\varDelta\varPhi$는 $\varDelta(BA)$로 나타낼 수 있다. 이때 도선 고리 내부의 면적은 일정하고 자기장의 세기만 변하므로 도선 고리에 유도되는 유도 기전력의 식은 다음과 같다.

$$\varepsilon=-N\frac{\varDelta\varPhi}{\varDelta t}=-N\frac{\varDelta(BA)}{\varDelta t}=-N\frac{\varDelta B}{\varDelta t}\cdot A$$

만약 도선 고리에 크기가 R인 저항을 연결한다면, 도선 고리를 지나는 유도 전류 I는 유도 기전력 ε과 저항 R로 나타낼 수 있다.

옴의 법칙을 적용하면 유도 전류의 세기는 다음과 같다.

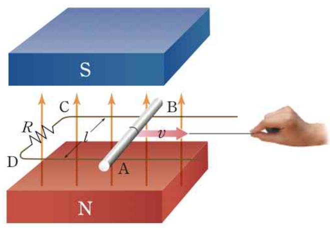
$$I=\frac{\varepsilon}{R}$$

[그림 12] 자기장의 세기가 변할 때의 유도기전력 설명 (김성원 외, 2018b, p.146)

마찬가지로 [그림 13]에서는 평균변화율과 순간변화율의 차이에 대한 이유로 속력이 일정하지 않은 상황에서는 균일한 자기장에서 도선 고리의 면적이 변할 때 다른 결과값을 나타낼 수 있다.

균일한 자기장에서 도선 고리의 면적이 변할 때

이번에는 균일한 자기장에서 도선 고리의 면적이 변할 때를 생각해 보자. 그림 2-4와 같이 균일한 자기장 $\vec{B}$에 수직인 폭이 l인 ㄷ자형 도선 위에 도체 막대가 있다. 이 도체 막대를 오른쪽 방향으로 잡아당겨서 일정한 속력 v로 움직일 때, 이 회로에 흐르는 유도 기전력과 유도 전류의 세기는 어떻게 되는지 알아보자.



| 그림 2-4 | 운동하는 도체에서 발생하는 유도 전류

도체 막대가 오른쪽으로 움직이면 막대와 ㄷ자형 도선으로 이루어진 부분의 넓이가 증가한다. 따라서 ㄷ자형 도선과 막대로 이루어진 직사각형 ABCD의 내부를 지나는 자기력선속은 증가한다. 이때 발생되는 유도 기전력은 패러데이 법칙으로부터 구할 수 있다.

패러데이 전자기 유도 법칙 $\varepsilon=-N\frac{\varDelta\varPhi}{\varDelta t}$에서 감은 수 N은 1회이므로 유도 기전력은 $\varepsilon=-\frac{\varDelta\varPhi}{\varDelta t}$이 된다. 또한, 자기력선속 $\varPhi=BA$에서 자기장의 세기 B는 일정하므로

$$\varepsilon=-\frac{\varDelta(BA)}{\varDelta t}=-\frac{\varDelta A}{\varDelta t}\cdot B$$

이다. 이때 면적의 변화 $\varDelta A$는 $l\cdot v\varDelta t$와 같으므로 위의 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon=-\frac{\varDelta A}{\varDelta t}\cdot B=-B\cdot\frac{(l\cdot v\varDelta t)}{\varDelta t}=-Blv$$

[그림 13] 도선고리의 면적이 변할 때의 유도기전력 설명 (김성원 외, 2018b, p.147)

이 내용을 학습하기 위해서는 고등학교 미적분까지 학습이 선행되어야 한다. 자기력 선속은

$\Phi=\int BdAcos\phi$와 같은 형태로 나타낼 수 있다. 먼저, 면적이 일정한 도선 고리에서 자기장의 세기가 변할 때의 유도기전력을 미분을 사용해 다시 작성해보면

$$\epsilon=-N\frac{d\Phi}{dt}=-N\frac{d}{dt}(BA)=-NA\frac{dB}{dt}$$

이다. 예를 들어 자기장이 시간에 따라 선형적으로 증가하는 경우 $B(t)=at$일 때는 평균값으로 접근하는 방식과 미분을 통해 접근하는 방식이 동일한 유도기전력을 나타낸다. 하지만 자기장이 비선형적인 $B(t)=at^2$와 같이 주어진다면, 두 방식은 서로 다른 결과를 도출하며, 미분을 통한 방식이 보다 일반적이고 정확한 결과값이 된다.

균일한 자기장에서 도선의 면적이 변하는 경우 중 ㄷ자 도선에서 도체막대가 움직이는 상황에 대해 유도기전력을 미분형태로 구해보면

$$\begin{aligned}\epsilon&=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}(BA)=-B\frac{dA}{dt}\\&=-B\frac{d(ls)}{dt}=-Bl\frac{ds}{dt}=-Blv\end{aligned}$$

과 같다. 면적이 일정한 도선고리에서 자기장이 변할 때와 유사하게 속력이 일정한 경우가 아닐 때에도 정확하게 유도기전력을 구할 수 있다. 기존의 서술방식으로는 자기장의 세기가 시간에 대한 선형함수일 때, 속력이 일정할 때를 제외하고는 유도기전력을 구할 때 문제가 발생하지만, 표현방식을 미분의 형태로 바꾼다면 이러한 문제점을 해결할 수 있다.

4.2 심화 물리 개념의 수학적 재구성

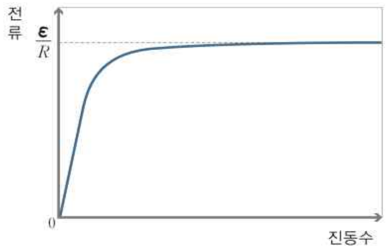
4.2.1 교류 회로의 리액턴스 계산*

저항에서도 전류가 변하면 이에 비례하여 전압이 변하지만, 그 비례관계는 진동수와 무관하다. 반면 코일과 축전기는 교류의 진동수에 따라 전압과 전류의 위상-크기 관계가 달라지며, 이 특성을 나타내는 값이 리액턴스이다.

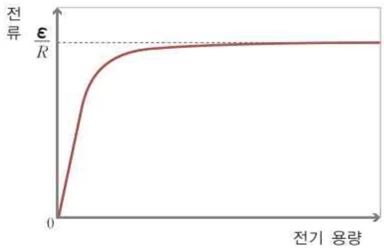
〈물리학Ⅱ〉 교과서에서는 교류회로에서 코일, 축전기 소자가 저항 역할을 한다는 사실을 ‘전류를 방해하는 정도’라는 표현을 통해 언급하고 있지만 ‘리액턴스’라는 용어와 수식적인 형태가 어떠한지는 다루고 있지 않다. 저항과 리액턴스의 같은 성질인 ‘전류를 방해하는 정도’라는 설명을 통해 교류 회로에서 축전기가 저항의 역할을 하게 됨을 알려주고 있지만, 어떠한 식의 형태를 갖고 있는지는 서술하지 않는다.

* 본래의 리액턴스 값은 순 허수값을 갖는다. 따라서 여러개의 소자가 결합된 회로를 다루게 된다면 합성 저항의 크기를 구하는 과정이 매우 까다롭다. 이에 본 연구는 하나의 소자만을 연결한 회로를 다루며 리액턴스의 크기만을 다룬다.

축전기는 극판이 넓을수록 **전기 용량**이 크다. 전기 용량이 클수록 충전되는 전하량이 크다. 동일한 전하량이 충전될 경우, 극판 내부에서 전하 사이의 거리는 극판이 넓을수록 멀어진다. 따라서 충전되는 전하들 사이의 척력이 작아진다. 전기 용량이 작으면 충전할 때 내부 전하들 사이의 척력이 커져 전하가 쉽게 극판으로 이동하지 못해 전류가 흐르지 못하게 된다. 그러므로 축전기의 전기 용량이 클수록 교류 전류의 세기에 영향을 주지 않는다. 축전기가 있는 회로에 교류 전원을 연결하면, 전류와 진동수, 전류와 전기 용량은 그림 3-5와 3-6과 같이 주어진다.



| 그림 3-5 | 축전기가 연결된 교류 회로에서 전류와 진동수의 관계



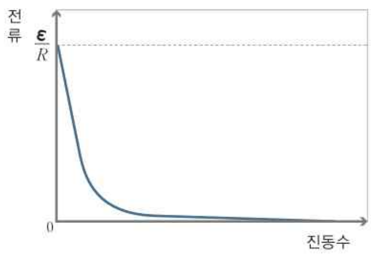
| 그림 3-6 | 축전기가 연결된 교류 회로에서 전류와 전기 용량의 관계

따라서 교류 회로에서 축전기는 교류 회로의 진동수가 작을수록, 축전기의 전기 용량이 작을수록 전류를 방해하는 정도가 커진다.

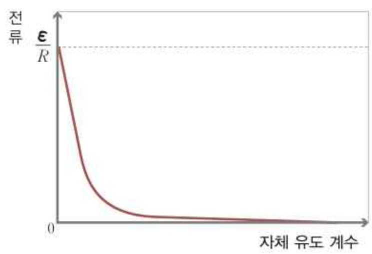
[그림 14] 비례관계를 이용한 용량 리액턴스 설명 (김성원 외, 2018b, p.186)

[그림 15]에서는 축전기와 다르게 '렌츠의 법칙'을 통해 코일이 전류의 흐름을 방해한다는 사전지식을 학생들이 갖고 있기 때문에 코일이 교류회로에서 저항의 역할을 하게 됨을 언급한다.

다시 말해, 코일에 교류가 흐르면 코일은 저항 역할을 하게 되며, 그 크기는 교류의 진동수와 **코일의 자체 유도 계수**에 따라 달라진다. 교류의 진동수가 클수록 코일은 더 큰 저항 역할을 한다. 진동수가 클수록 전류의 방향이 빨리 바뀌어 자기장이 빨리 바뀌므로 코일에 생기는 유도 전류가 커지기 때문이다. 이에 따라 그림 3-8과 같이 코일은 진동수가 큰 전류를 잘 흐르지 못하게 하지만 진동수가 작은 전류의 세기에는 거의 영향을 주지 않는다. 또, 그림 3-9와 같이 코일의 자체 유도 계수가 클수록 코일에 흐르는 유도 전류의 세기가 증가하며, 유도 전류는 교류의 반대 방향으로 생기므로 코일에 흐르는 전체 전류가 작아진다. 이는 곧 코일의 저항 역할이 커졌다는 것을 의미한다. 반대로 코일의 자체 유도 계수가 작으면 전류의 세기에는 거의 영향을 주지 않는다.



| 그림 3-8 | 코일이 연결된 교류 회로에서 전류와 진동수의 관계



| 그림 3-9 | 코일이 연결된 교류 회로에서 전류와 자체 유도 계수의 관계

따라서 교류 회로에서의 코일은 교류 회로의 진동수가 클수록, 코일의 자체 유도 계수가 클수록 전류를 방해하는 정도가 커진다.

[그림 15] 비례관계를 이용한 유도 리액턴스 설명 (김성원 외, 2018b, p.187)

[그림 16]에서는 교류회로에서 여러 소자가 결합되었을 때의 공명 진동수에 관해 다루지만 앞선 리액턴스에 관한 설명으로는 공명 진동수를 충분히 설명하지 못해, 새로운 현상인 것처럼 서술하고 있음을 알 수 있다.

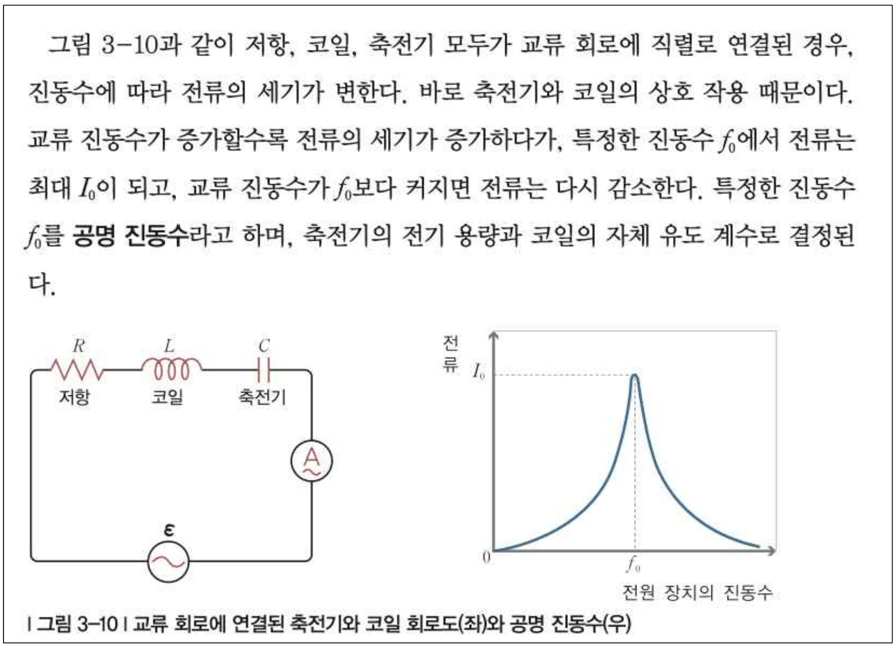


그림 3-10과 같이 저항, 코일, 축전기 모두가 교류 회로에 직렬로 연결된 경우, 진동수에 따라 전류의 세기가 변한다. 바로 축전기와 코일의 상호 작용 때문이다. 교류 진동수가 증가할수록 전류의 세기가 증가하다가, 특정한 진동수 f_0에서 전류는 최대 I_0이 되고, 교류 진동수가 f_0보다 커지면 전류는 다시 감소한다. 특정한 진동수 f_0를 **공명 진동수**라고 하며, 축전기의 전기 용량과 코일의 자체 유도 계수로 결정된다.

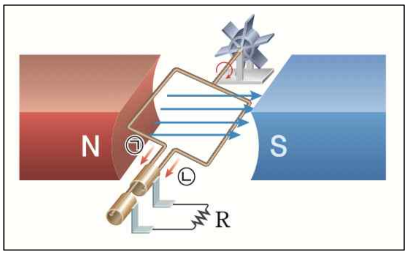
| 그림 3-10 | 교류 회로에 연결된 축전기와 코일 회로도(좌)와 공명 진동수(우)

[그림 16] ‘RLC교류회로’에서 공명 진동수에대한 설명 (김성원 외, 2018b, p.188)

이 내용을 학습하기 위해서는 고등학교 미적분까지 학습이 선행되어야 한다. 그래프를 통해 서술했던 각 소자들의 저항의 크기를 미분을 이용해서 교과서에서 사용할 수 있는 부록을 제시한다.

〈교과서 부록〉

영구 자석에 의한 자기장 내부에 폐회로를 설치하고 폐회로를 회전시키면 패러데이 법칙에 의해 ‘유도기전력’이 생성되고 회로에는 유도전류가 흐르게 된다. 이때, 유도전류는 크기와 방향이 주기적으로 변하는 ‘교류전류’이다. 이때 발생되는 유도기전력 ε을 구해보자.



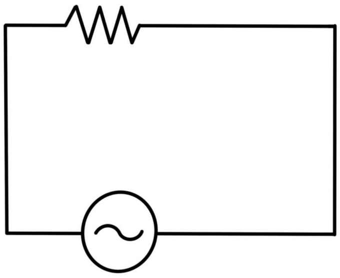
[그림 부록-1] 교류 발전기(강남화 외, 2018, p.130)

균일한 자기장을 B, 폐회로의 면적을 A라 하고 임의의 시각 t에서 자기장과 폐회로가 이루는 각도를 θ라고 하자. 이때 폐회로를 지나는 자기선속 $\Phi = BA\cos\theta$이다. 코일의 각진동수가 ω면 시각 t에서 $\theta = \omega t$이다. 따라서 자기장 내에서 회전하는 폐회로에 만들어지는 유도기전력은

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BA\cos\theta)}{dt} = -\frac{d(BA\cos\omega t)}{dt} = BA\omega\sin(\omega t)$$

다. 즉 유도기전력은 시간에 대한 사인함수로 변한다.

(1) 저항만 연결된 교류 회로



[그림 부록-2] 저항만 연결된 교류 회로

이 그림은 교류 기전력에 크기가 R인 저항만을 연결한 회로이다. 이 회로에 흐르는 전류를 $I(t)$라고 하면, $\varepsilon(t) = I(t)R$ 이므로 $I(t)$는 다음과 같다.

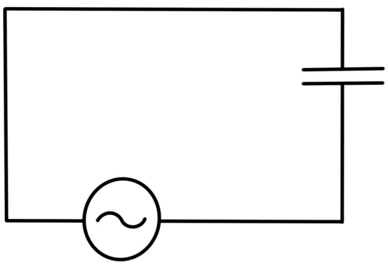
$$I(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R} = \frac{\varepsilon}{R}\sin(\omega t) = I\sin(wt)$$

전기 저항의 양 끝단의 전위차는

$$V(t) = I(t)R = I\sin(\omega t)R = V\sin(\omega t)$$

다. 이를 통해 저항만 연결한 교류 회로에서는 교류 전류 $I(t)$와 전기 저항의 양 끝단에 걸리는 전압 $V(t)$가 동일한 주기, 진동수, 각진동수를 갖는 것을 알 수 있다. 또한, 전류가 증가하고 감소하는 모습과 전압이 증가하고 감소하는 모습이 동일하다. 이를 통해 저항만을 연결한 교류회로에서는 전류 $I(t)$와 전압 $V(t)$가 동일한 위상을 갖는 것을 알 수 있다.

(2) 축전기만 연결된 교류 회로



[그림 부록-3] 축전기만 연결된 교류 회로

이 그림은 전기 용량이 C인 축전기에 교류 기전력 $\varepsilon(t) = \varepsilon sin(\omega t)$인 전원을 연결한 회로이다. 이 회로에 흐르는 전류를 $I(t)$라고 하면, $\varepsilon(t) = \frac{q}{C}$가 성립한다. 이 식의 양변을 시간 t에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\varepsilon\sin(\omega t)) = \varepsilon\omega\cos(\omega t) = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{C}I(t)$$

교류 기전력 $\varepsilon(t) = \varepsilon\sin(\omega t)$에 흐르는 전류$I(t)$는

$$I(t) = \varepsilon\omega C\cos(\omega t) = I\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

이다. 축전기 양끝의 전위차 $V(t)$는 축전기에 대전된 전하 $q(t) = \varepsilon C\sin(\omega t)$를 축전기의 전기용량 C로 나누어 구할 수 있다. 즉,

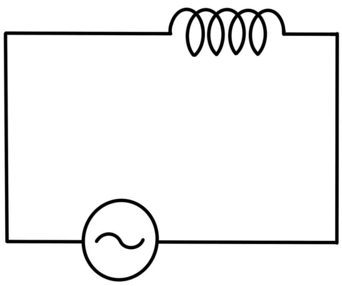
$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = \varepsilon\sin(\omega t) = \varepsilon(t) = V\sin(\omega t)$$

다. 앞서 구한 전류와 전압의 관계를 비교하면 전류의 위상이 전압의 위상보다 $\frac{\pi}{2}$만큼 앞선다는 것을 알 수 있다. 앞서 구한 전압의 식을 옴의 법칙에 적용해보면, 저항의 역할을 하는 값이 $\frac{1}{\omega C}$이다. 이 값은 교류회로에서 축전기의 전류에 대한 방해 효과로 '용량 리액턴스'라고 하며, X_C로 나타낸다. 각진동수 ω와 진동수 f사이에는 $\omega = 2\pi f$ 관계가 있으므로 X_C는

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

로 나타낼 수 있다. C가 F(패럿), f가 Hz(헤르츠)의 단위로 주어질 때, X_C의 단위는 저항의 단위와 같은 Ω(옴)이 된다.

(3) 코일만 연결된 회로



[그림 부록-4] 코일만 연결된 교류 회로

위 그림은 인덕턴스 크기가 L인 코일에 교류 기전력 $\varepsilon(t) = \varepsilon\sin(\omega t)$인 전원을 연결한 회로이다. 이 회로에 흐르는 전류를 $I(t)$라고 하면, $\varepsilon(t) = \varepsilon\sin(\omega t) = L\frac{dI(t)}{dt}$가 성립한다. 그러면 코일의 양 끝에 형성되는 전위차 $V(t)$는

$$V(t) = L\frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon\sin(\omega t) = V\sin(\omega t)$$

이 식을 정리하면 $\frac{dI(t)}{dt} = \frac{V}{L}\sin(\omega t)$이고 적분하여 $I(t)$를 구하면,

$$I(t) = \int dI = -(\frac{V}{wL})\cos(\omega t) = -I\cos(\omega t) = I\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

전압과 전류의 위상을 비교하면, 전류의 위상이 전압의 위상보다 $\frac{\pi}{2}$만큼 뒤진다는 것을 알 수 있다. 앞서 구한 전압의 식을 옴의 법칙에 적용해보면, 저항의 역할을 하는 값이 ωL 임을 알 수 있다. 이 값은 교류회로에서 코일의 전류에 대한 방해 효과로 '유도

리액턴스'라고 하며, X_L로 나타낸다. 각진동수 ω와 진동수 f사이에는 $\omega = 2\pi f$ 관계가 있으므로 X_L는

$$X_L = \omega L = 2\pi f L$$

로 나타낼 수 있다. L이 H(헨리), f가 Hz(헤르츠)의 단위로 주어질 때, X_L의 단위는 저항의 단위와 같은 Ω(옴)이 된다.

이와 같이 삼각함수의 형태로 소자별 리액턴스 값을 직접 구하는 과정을 통해 교류회로의 진동수가 커지고 작아짐에 따라 어느 정도 리액턴스 값을 갖는지 직접 계산할 수 있다.

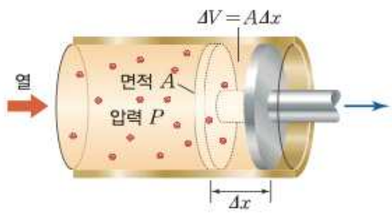
4.2.2 이상기체 상태방정식을 통한 내부에너지의 유도

이상기체 상태방정식과 분자 운동을 미시적으로 해석한다면, 벽과 충돌에 따른 운동량의 변화를 압력을 통해 정의할 수 있다. 이 과정에서 운동량 보존법칙이 적용되며, 개별 분자의 운동에너지의 합이 기체의 내부에너지와 연결된다.

[그림 17]은 〈물리학 I 〉교과서에서 열역학 제 1법칙을 설명하기 위해 외부로부터 받은 열은 내부에너지의 변화량과 기체가 외부에 해준 일의 합임을 보이는 과정이다. 기체가 외부에 해준 일($W = P\Delta V$)에 관한 설명은 수록되어 있지만, 내부에너지는 어떠한 변수로 이루어 져있는지 혹은 어떠한 형태로 나타나는지 알 수 없다.

2 열역학 제1법칙과 열역학 과정

그림 I-41과 같이 실린더 내부에 들어 있는 기체에 열을 가하면 기체의 온도가 올라가고, 이에 따라 실린더 내부의 기체의 부피가 팽창하면서 피스톤을 실린더 바깥쪽으로 밀게 된다.



| 그림 I-41 | 기체가 외부에 해 준 일

이때 기체의 압력을 P, 피스톤의 단면적을 A라고 하면 피스톤에 작용하는 힘은 $F = PA$이다. 이 힘 때문에 피스톤이 Δx만큼 밀려나는 동안 기체의 압력이 P로 일정하다고 하면, 힘과 이동 거리의 곱이 일이므로 기체가 한 일 W는 다음과 같다.

$$W = F \cdot \Delta x = PA \cdot \Delta x = P\Delta V$$

즉, 기체가 팽창하면서 하는 일은 압력과 부피 변화량의 곱과 같다.

용기 속의 기체가 외부로부터 열을 받으면 그 열은 항상 같은 양의 일이나 에너지로 전환된다. 예를 들어, 그림 I-42와 같이 기체가 든 풍선을 뜨거운 물에 담그면 풍선 내부의 온도가 상승하면서 풍선의 부피가 커진다.

〈처음〉 〈나중〉

| 그림 I-42 | 열을 받아 팽창하는 풍선

기체가 열을 공급받으면 내부 에너지가 증가하고, 기체 분자들의 운동이 활발해진다. 그러면서 풍선의 내벽과 충돌하여 부피가 팽창하면서 외부에 일을 한다. 즉, 풍선이 따뜻한 물에서 공급받은 열은 풍선 속의 기체 분자의 내부 에너지를 증가시키고, 풍선 외부에 일을 하는 데 쓰이게 된다.

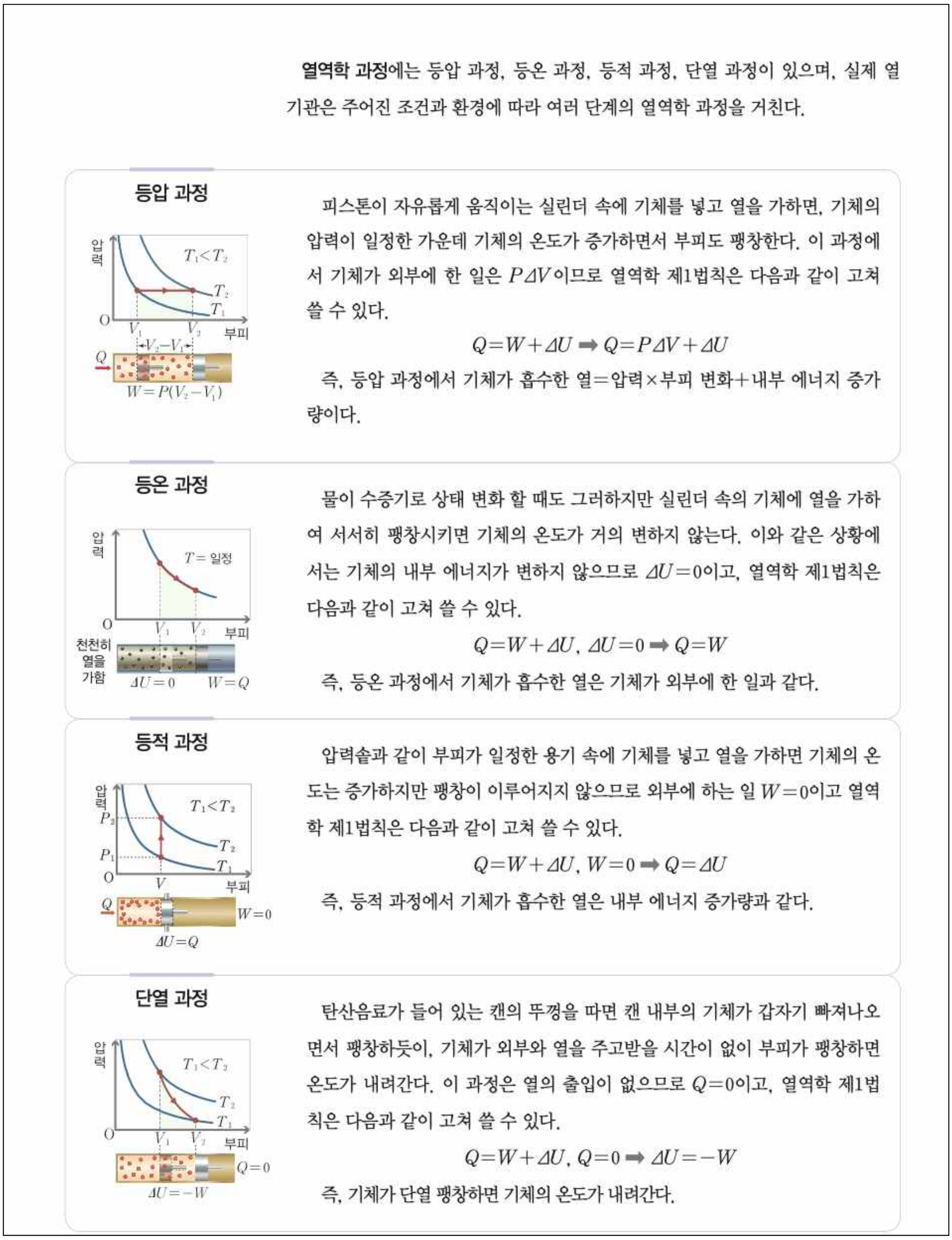
이러한 관계를 식으로 나타내면,

$$Q = \Delta U + W$$

와 같다. 여기서 Q는 기체가 외부로부터 받은 열이고, ΔU는 기체의 내부 에너지 변화량, W는 기체가 외부에 해 준 일이다. 즉, 기체가 흡수한 열이 내부 에너지의 변화량과 기체가 외부에 한 일의 합과 같다는 것을 나타낸다. 이를 **열역학 제1법칙**이라고 하며, 열과 역학적 에너지를 포함한 에너지 보존 법칙이다.

[그림 17] 기체의 일과 열역학 제1법칙의 설명 (김성원 외, 2018a, p.54-55)

[그림 18]을 통해 알 수 있듯이 〈물리Ⅰ〉 교과서의 열-에너지 파트에서 많은 분량을 차지 하는 열기관의 압력-부피 그래프를 다룰 때 내부 에너지는 온도에 비례함을 알 수 있기는 하지만 간접적으로 파악하는 정도에 그친다.



열역학 과정에는 등압 과정, 등온 과정, 등적 과정, 단열 과정이 있으며, 실제 열 기관은 주어진 조건과 환경에 따라 여러 단계의 열역학 과정을 거친다.

등압 과정

피스톤이 자유롭게 움직이는 실린더 속에 기체를 넣고 열을 가하면, 기체의 압력이 일정한 가운데 기체의 온도가 증가하면서 부피도 팽창한다. 이 과정에서 기체가 외부에 한 일은 $P\Delta V$이므로 열역학 제1법칙은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$Q=W+\Delta U \Rightarrow Q=P\Delta V+\Delta U$$

즉, 등압 과정에서 기체가 흡수한 열=압력×부피 변화+내부 에너지 증가량이다.

등온 과정

물이 수증기로 상태 변화 할 때도 그러하지만 실린더 속의 기체에 열을 가하여 서서히 팽창시키면 기체의 온도가 거의 변하지 않는다. 이와 같은 상황에서는 기체의 내부 에너지가 변하지 않으므로 $\Delta U=0$이고, 열역학 제1법칙은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$Q=W+\Delta U,\ \Delta U=0 \Rightarrow Q=W$$

즉, 등온 과정에서 기체가 흡수한 열은 기체가 외부에 한 일과 같다.

등적 과정

압력솥과 같이 부피가 일정한 용기 속에 기체를 넣고 열을 가하면 기체의 온도는 증가하지만 팽창이 이루어지지 않으므로 외부에 하는 일 $W=0$이고 열역학 제1법칙은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$Q=W+\Delta U,\ W=0 \Rightarrow Q=\Delta U$$

즉, 등적 과정에서 기체가 흡수한 열은 내부 에너지 증가량과 같다.

단열 과정

탄산음료가 들어 있는 캔의 뚜껑을 따면 캔 내부의 기체가 갑자기 빠져나오면서 팽창하듯이, 기체가 외부와 열을 주고받을 시간이 없이 부피가 팽창하면 온도가 내려간다. 이 과정은 열의 출입이 없으므로 $Q=0$이고, 열역학 제1법칙은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$Q=W+\Delta U,\ Q=0 \Rightarrow \Delta U=-W$$

즉, 기체가 단열 팽창하면 기체의 온도가 내려간다.

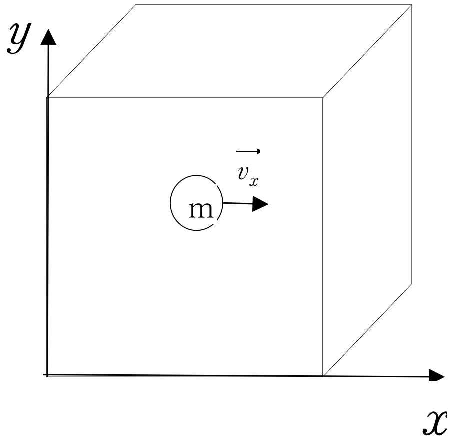
[그림 18] 열역학 과정에 대한 설명 (김성원 외, 2018a, p.56)

이 단원을 학습하기 위해서는 고등학교 미적분 과목까지 학습이 선행되어야 한다. 〈물리학 Ⅰ〉 ‘Ⅰ.역학과 에너지’의 ‘1.힘과 운동’에서 학습한 내용을 바탕으로 내부에너지의 구체적인 형태를 서술하는 방식을 통해 부족한 설명 부분을 추가한다.

온도, 부피, 압력 등은 기체 분자들의 평균적인 움직임을 나타내는 거시적인 양이다. 이때 분자들의 미시적인 움직임을 살펴봄으로써 온도, 압력, 부피 등에 어떻게 영향을 끼치는지 살펴보고 이를 통해 내부에너지는 어떠한 값을 가지는지 알아보자.

한 변의 길이가 L이고 부피가 V인 정육면체의 상자 안에 기체분자가 1개 들어 있다고

가정하자. 오른쪽 방향이 x방향이고 분자의 속력이 v_x일 때 오른쪽 벽면에 작용하는 힘을 구해보자.



[그림 부록-5] 정육면체 상자 속에 있는 입자 1개

분자가 벽에 충돌할 때 운동량과 에너지가 보존된다고 가정하면, 분자의 충돌 전후 운동량 변화량의 크기는 $\Delta p = 2m|v_x|$가 된다. 기체 분자가 L만큼 이동하는 데 걸리는 시간은 $\frac{L}{v_x}$이므로 평균적으로 한 벽면에 충돌하는 데 걸리는 시간 $\Delta t = \frac{2L}{|v_x|}$가 된다. 이때 벽면에 가해지는 힘의 크기는

$$F_x = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2m|v_x|}{\frac{2L}{|v_x|}} = \frac{m\overline{v_x^2}}{L}$$

이다.

속력의 제곱의 평균은 $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$이므로 평균적으로 기체운동이 방향에 따라 다르지 않음을 가정하면

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$$

이다. 위의 두 식을 연립하면

$$F_x = \frac{m\overline{v_x^2}}{L} = \frac{m\overline{v^2}}{3L}$$

가 되고, 벽면의 면적을 A라고 하면 벽면에 가해지는 압력은

$$P = \frac{F}{A} = \frac{m\overline{v^2}}{3AL} = \frac{m\overline{v^2}}{3L^3} = \frac{m\overline{v^2}}{3V}$$

이고, N개의 입자인 상황으로 확장시키면

$$PV = \frac{1}{3}mN\overline{v^2}$$

이고, 정육면체 속의 기체가 이상기체라고 가정하면 이상기체 상태방정식 $PV = nRT$를 만족한다. 따라서

$$PV = \frac{1}{3}mN\overline{v^2} = \frac{2}{3}N\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = \frac{2}{3}E_k = nRT$$

이고, 이상기체는 운동에너지 외에 퍼텐셜 에너지는 존재하지 않으므로

$$U = E_k = \frac{3}{2}nRT$$

이다. 분자의 평균 운동에너지는 온도에 의해 결정되며, 계의 온도가 높을수록 분자들이 활발하게 움직이게 된다. 즉 온도는 분자들이 활발하게 움직이는 정도를 나타내는 척도이다.

이상기체로 이루어진 열기관에서 나타나는 등압 과정, 등온 과정, 등적 과정, 단열 과정을 앞서 구한 내부에너지와 온도의 관계를 통해 해석적으로 어떠한 값을 갖는지 구해보자.

Ⅰ. 등압 과정

열역학 제 1법칙 $Q = \Delta U + W = \Delta U + P\Delta V$ 에서 압력이 일정한 과정이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T,\ W = P\Delta V = nR\Delta T$$

따라서 $Q = \frac{5}{2}nR\Delta T$이다. 즉, 등압 과정에서 공급받은 열의 양은 3 : 2의 비율로 내부에너지와 일에너지로 나누어진다.

Ⅱ. 등온 과정

온도의 변화가 없으므로 $\Delta T = 0$이다. 따라서 공급해준 열에 대해 내부 에너지의 변화가 없다. 따라서 열역학 제 1법칙을 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$Q = W$$

또한, 이상기체 상태 방정식을 만족하므로

$$W = \int P(V)dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}dV$$ (V_i : 기체의 초기 부피, V_f : 기체의 나중 부피)

로 나타낼 수 있다. 따라서 적분 식을 계산해 보면

$$Q = W = nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

다. 즉, 등온 과정에서는 공급된 열은 모두 일을 하는 데 사용된다.

Ⅲ. 등적 과정

부피의 변화가 없으므로 $W = P\Delta V = 0$이다. 따라서 열역학 제 1법칙을 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$Q = U = \frac{3}{2}nR\Delta T$$

즉, 등적 과정에서는 공급된 열은 모두 내부에너지를 증가시키는 데에 사용된다.

Ⅳ. 단열 과정

외부와의 열 출입이 없는 단열 과정은 $Q = \Delta U + P\Delta V = 0$이다. 따라서 열역학 제1법칙을 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\Delta U = -P\Delta V$$

즉, 기체가 단열 팽창하면 기체의 온도가 내려가고 단열 압축하면 기체의 온도가 올라간다.

〈물리학Ⅰ〉 교과서에서는 “열이 내부에너지 변화와 기체가 한 일로 사용된다”고 제시하고 있음에도 불구하고, 실제 서술이 일에 대한 설명에만 치우쳐 있는 점을 보완하고자 하였다. 이를 위해 기체 분자의 운동을 수학적으로 모델링하여 내부에너지 변화를 직접 도출하는 과정을 제시함으로써, 열역학 제1법칙의 의미를 보다 구체적이고 정량적으로 제시하고자 하였다.

5. 결론 및 제언

본 연구는 고등학교 수학 개념을 활용하여 물리 교과서 속 물리 개념을 재구성하고 보완함으로써, 물리 개념에 대한 깊이 있는 이해와 이를 통해 수리 소양을 강화하고자 하였다. 〈물리학 I, II〉 교과서 주요 개념 중에서 수학과의 연계 가능성이 높은 내용을 중심으로 분석을 진행하였다.

먼저, 운동량 보존, 일과 에너지, 원운동, 파동 간섭, 스넬의 법칙에 대해서는 기존 교과서의 서술 방식이 개념적이거나 정성적인 수준에 머물러 있다는 점을 토대로, 함수, 도함수, 벡터, 삼각함수 등 고등학교 수학 개념을 활용해 보충하였다. 물리 개념과 수학 개념 사이의 구조적 연결성을 파악할 수 있도록 하고, 학생들이 개념을 보다 정확하게 이해할 수 있도록 하였다. 열역학(이상기체 상태방정식 포함)과 유도기전력은 수학 개념을 중심으로 내용을 새롭게 재구성하였다. 열역학에서는 상태방정식의 수학적 구조와 그에 따른 그래프 해석, 변수 간 관계를 함수 개념을 통해 설명하였으며, 유도기전력에서는 시간에 따른 자기선속 변화량을 도함수로 해석하고, 패러데이 법칙을 미분의 관점에서 제시함으로써 심화된 개념 이해를 지향했다. 이와 같은 교과서 재구성은 물리 개념을 보다 체계적이고 논리적으로 접근할 수 있는 기반을 마련한다는 점에서 의미가 있다.

물리 교육에서 수학 개념을 단순히 계산의 도구로 사용하는 데 그치지 않고, 개념 이해를 위한 사고의 도구로 활용할 수 있음을 보여주고자 하였다. 수학과 물리의 통합적 접근은 학생들에게 물리 개념을 보다 심층적으로 이해할 수 있는 기회를 제공하며, 이는 곧 수리 소양의 함양으로 이어질 수 있다. 특히, 수학과 과학 중심 교육과정이 운영되는 과학중점 고등학교와 같은 학교 환경에서 본 연구에서 제시한 방안은 실질적인 교수-학습 자료로 활용될 가능성이 높다. 나아가 수학과 물리를 연계한 교육은 과목 간 학습의 단절을 줄이고, 융합적 사고력을 향상시키는 데에 기여할 수 있다.

다만, 재구성된 내용을 실제 수업에 적용하거나 학습 효과를 분석하는 연구는 후속적으로 이루어질 필요가 있다. 후속 연구에서는 본 연구의 내용을 실제 교수·학습 활동에 적용하여 수리 소양, 개념 이해도, 물리적 문제 해결력의 변화 등을 종합적으로 분석함으로써, 이론적 타당성과 함께 실천적 가능성을 함께 검토할 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] 교육부, *고등학교 교육과정,* 2022.

[2] 김성원 외 5인, *물리학Ⅰ,* 지학사, 2018a.

[3] 김성원 외 5인. *물리학Ⅱ*, 지학사, 2018b.

[4] 강남화 외 5인, *물리학Ⅱ*, 천재교육, 2018.

[5] 강지훈, *고등학교 수학교과과정 수정에 관한 고찰: 물리교육과 연계하여*, 고려대학교 교육대학원 석사학위논문, 2008.
https://dcollection.korea.ac.kr/public_resource/pdf/000000006358_20251229210343.pdf

[6] 박수민, *교육과정에서 기초소양으로써 수리 소양에 관한 연구,* **수학교육논문집** 37(3), (2023), 349-368.
https://doi.org/10.7468/jksmee.2023.37.3.349

전관우
대한민국 강원특별자치도 춘천시 강원대학길1
강원대학교 사범대학 수학교육과
E-mail: soldier5403@naver.com

김선희
대한민국 강원특별자치도 춘천시 강원대학길1
강원대학교 사범대학 수학교육과
E-mail: mathsun@kangwon.ac.kr

Communications of KRIMS **1** *(2025)* *Kangwon National University*
No. 2, pp. 81–106 *Research Institute for Mathematical Sciences*

A Mathematical Explanation for In-depth Understanding of Physical Concepts in High School

Gwan U Jeon* · Sun Hee Kim†

*,†Department of Mathematics Education, Kangwon National University

Abstract

Students only memorize formulas rather than deeply understand physical concepts in high school because physics textbooks described only qualitatively and lacked quantitative explanations. This study attempted to help understand concepts by explaining physical concepts using mathematics and adding quantitative interpretations. In the textbooks of Physics I and Physics II of the 2015 revised curriculum, a proposal was made to reconstruct the explanations of impulse and momentum, work-energy theorem, uniform circular motion, wave interference, Snell's Law, and induced electromotive force(emf) using mathematics, showing that a more logical and clear conceptual explanation was possible. In addition, the contents of internal energy induction using the law of conservation of momentum and reactance calculation in an alternating current circuit, which are mathematically accessible concepts that are not included in the text of the textbook, were proposed in the form of a 'textbook appendix'. This presents the learning without deviating from the curriculum and can be the basis for acquiring mathematical knowledge in physics subjects.

* Dept. of Mathematics Education, Kangwon National University, Kangwondaehak-gil,Chuncheon-si, Gangwon-do, Korea. E-mail: soldier5403@naver.com

† Dept. of Mathematics Education, Kangwon National University, Kangwondaehak-gil,Chuncheon-si, Gangwon-do, Korea. E-mail: mathsun@kangwon.ac.kr